

Vakhnenko 方程的光滑周期波的波长*

郭丽娜¹, 陈爱永¹, 黄文韬^{1,2}

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 数学系, 广西 桂林 541004;
2. 贺州学院 理学院 数学系, 广西 贺州 542800)

摘要: 主要研究 Vakhnenko 方程的光滑周期行波解的波长.通过变量变换, Vakhnenko 方程可以转化为一个平面多项式微分系统.利用动力系统的临界周期分支方法研究这个多项式微分系统,其主要结果是给出了周期函数 $T(h)$ 或波长函数 $\lambda(a)$ 的单调性质.与 KdV 方程比较, 波长函数 $\lambda(a)$ 单调递减到一个有限的数,而不是单调递增到无穷.结果表明, 对于固定波速 c , Vakhnenko 方程不存在任意小或任意大波长的光滑周期行波解.

关键词: Vakhnenko 方程; 周期波; 周期函数; 波长; 单调性

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A

doi: 10.21656/1000-0887.370020

引 言

非线性波动方程及其行波解的研究在物理学的许多领域中有非常重要的作用.在文献[1]中 Vakhnenko 讨论了非线性演化方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + u = 0. \quad (1)$$

该方程描述了波在松弛介质中的传播,为了表述方便,人们称之为 Vakhnenko 方程.在文献[2]中, Vakhnenko 和 Parkes 发现了 Vakhnenko 方程的一个两圈孤子解.后来,在文献[3]中, Morrison, Parkes 和 Vakhnenko 又找到了 Vakhnenko 方程的一个 N 圈孤子解.

本文研究下列形式的行波解:

$$u(x, t) = u(x + ct). \quad (2)$$

将方程(2)代入方程(1),可以得到对应的方程为

$$(u + c)u'' + u + (u')^2 = 0. \quad (3)$$

本文着重研究 Vakhnenko 方程的光滑周期行波解.在每一个周期内,光滑周期行波解有唯一的最大值和最小值.在流体力学中,周期波解的周期 T 对应周期波的波长,用 λ 表示.

关于平面多项式微分系统的周期函数的研究已有诸多成果^[4-11].然而,直到现在,关于非线性波动方程的周期波的周期函数的研究成果甚少^[12-14].本文的目的是研究 Vakhnenko 方程

* 收稿日期: 2016-01-13; 修订日期: 2016-01-25

基金项目: 国家自然科学基金(11361017); 广西自然科学基金(2015GXNSFGA139004)

作者简介: 郭丽娜(1989—),女,硕士生(E-mail: gdzhaos@163.com);

陈爱永(1977—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: aiyongchen@163.com).

(1) 的光滑周期行波解的波长 λ 对于波高 a 的依赖性, 研究结果表明波长 λ 关于波高 a 是单调的. 关于光滑周期行波解的波长函数的单调性结果, 有望用于扰动 Hamilton (哈密顿) 偏微分方程的次谐波分支. 此外, 也能用于光滑周期行波解的轨道稳定性的研究中.

1 预备知识

本节首先介绍一些需要用到的概念和命题, 考虑解析平面微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y), \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

满足下列假设:

(H) 微分系统(4)在原点有一个中心, 并且还有一个形式为 $H(x, y) = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ 的首次积分, 其中 $A(0) = 0$, 并且它的积分因子 K 只依赖于 x .

令 (x_1, x_r) 是微分系统(4)的周期环 P 在 x 轴上的投影, 其中 $x_1 < 0 < x_r$. 那么, 由文献 [11] 中的引理 3.1 可知, 假设(H)表明 $M := (4AC - B^2)/(4|C|)$ 是一个定义在 (x_1, x_r) 上的解析函数, 其中 $M(0) = 0$ 且对于任意的 $x \in (x_1, x_r) \setminus \{0\}$ 有 $xM'(x) > 0$. 因此, 存在一个唯一的解析函数 σ 使得 $M \circ \sigma = M$. 这里 σ 是一个对合且 $\sigma(0) = 0$. 在 $(x_1, x_r) \setminus \{0\}$ 上给定一个解析函数 f , 定义它的 σ 平衡为

$$B_\sigma(f)(x) = \frac{f(x) - f(\sigma(x))}{2}. \quad (5)$$

有了这些定义, 文献[11]中定理 A 的陈述(b)可以归纳如下.

命题 1^[11] 若解析微分系统(4)满足假设(H), 设 $\mu_0 = -1$, 定义递推公式为

$$\mu_i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2i-3} \right) \mu_{i-1} + \frac{\sqrt{|C|M}}{(2i-3)K} \left(\frac{K\mu_{i-1}}{\sqrt{|C|M'}} \right)', \quad (6)$$

$$l_i := \frac{K\mu_i}{\sqrt{|C|M'}}, \quad (7)$$

其中 $i \geq 1$. 在 $(0, x_r)$ 上, 若 $B_\sigma(l_i)$ 的零点数目按重数计算有 n 个, 并且 $n \geq 0, i > n$, 则中心在原点的临界周期的数目也按重数计算, 最大为 n .

特别地, 若 $n = 0$, 则周期函数是单调的. 确定 $B_\sigma(l_i)$ 的零点数目关键是下面的定理, 请参阅文献[11]中的定理 B. 下文中, “Res” 表示多项式结式.

命题 2^[11] 令 σ 是一个在 (x_1, x_r) 上的解析对合, 且 $\sigma(0) = 0$, 并令 l 是一个在 $(x_1, x_r) \setminus \{0\}$ 上的解析函数. 假设 l 和 σ 都是代数的, 即存在 $L, S \in C[x, y]$, 使得 $L(x, l(x)) = 0, S(x, \sigma(x)) = 0$. 定义

$$T(x, y) := \text{Res}_z(L(x, z), L(y, z)), R(x) := \text{Res}_y(S(x, y), T(x, y)).$$

最后令 $s(x)$ 和 $t(x)$ 分别为 $S(x, y)$ 和 $T(x, y)$ 关于 y 的首项系数, 那么下列结论成立:

(a) 若对于 $x_0 \in (x_1, x_r) \setminus \{0\}$ 满足 $B_\sigma(l)(x_0) = 0$, 则 $R(x_0) = 0$.

(b) 若 $s(x)$ 和 $t(x)$ 在 x_0 点不同时为 0, 则在 $B_\sigma(l)$ 的零点 x_0 的重数将不超过 R 的零点 x_0 的重数.

为了研究系统(9)在中心的周期函数, 我们将引用 Geyer 和 Villadelprat 有关周期函数导数的结论.

命题 3^[14] 若解析微分系统(4)满足假设(H), 且 $B = 0$, 令 $T(h)$ 是周期轨道 $\gamma_h: H(x, y)$

$= h$ 的周期函数, 则

$$T'(h) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} G(x) \frac{dx}{y}, \quad (8)$$

其中

$$G = \frac{1}{2C} \left(\frac{KA}{A'} \right)' - \frac{K(AC)'}{4A'C^2}.$$

2 Vakhnenko 方程的光滑周期波与周期尖波

方程(3)的对应行波系统, 由以下式子给出:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = y, \\ \frac{dy}{d\xi} = -\frac{u+y^2}{u+c}. \end{cases} \quad (9)$$

显然, 式(9)是一个具有奇异直线 $u = -c$ ($c > 0$) 的奇异行波系统. 系统(9)有3个平衡点分别为 $O(0, 0)$ 和 $P_{\pm}(-c, \pm\sqrt{c})$, 其中 $O(0, 0)$ 是一个中心, $P_{\pm}(-c, \pm\sqrt{c})$ 是两个鞍点. 原点周围有一个由直线 $u = -c$ 和抛物线 $3y^2 + 2u - c = 0$ 两个异宿轨道包围的周期环. 系统(9)的相图如图1所示.

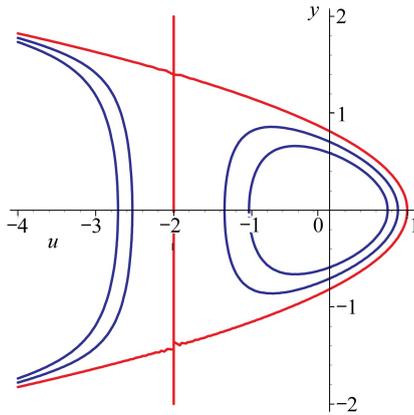


图1 当 $c > 0$ 时, 系统(9)的相图

Fig. 1 The phase portrait of system (9) for $c > 0$

系统(9)的一个首次积分为

$$H(u, y) = A(u) + B(u)y + C(u)y^2, \quad (10)$$

其中

$$A(u) = \frac{c}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3, \quad B(u) = 0, \quad C(u) = \frac{1}{2}(u+c)^2,$$

积分因子 $K(u) = (u+c)^2$. 当且仅当 $(u, y) = (u, u')$ 是平面微分系统(9)的一个周期轨道时, $u(\xi)$ 是方程(3)的一个光滑周期行波解. 系统(9)的周期轨道由 $H(u, y) = h$ 确定, 其中

$$h \in (0, h_s), \quad h_s = H(-c, \sqrt{c}) = \frac{c^3}{6}.$$

代数曲线

$$y^2 = \frac{2h - 2A(u)}{(u + c)^2} \quad (11)$$

相交于 u 轴的 3 个点为 $(u_1, 0)$, $(u_0, 0)$ 和 $(u_m, 0)$, 其中 $u_m < -c < u_0 < 0 < u_1 < c/2$. 光滑周期波的图像如图 2(a) 所示. 若 $h \rightarrow h_s$, 则 $u_1 \rightarrow c/2$, $u_m \rightarrow -c \leftarrow u_0$. 通过式(9)的第一个方程, 可以得到

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\sqrt{3(c - 2u)}}{3}. \quad (12)$$

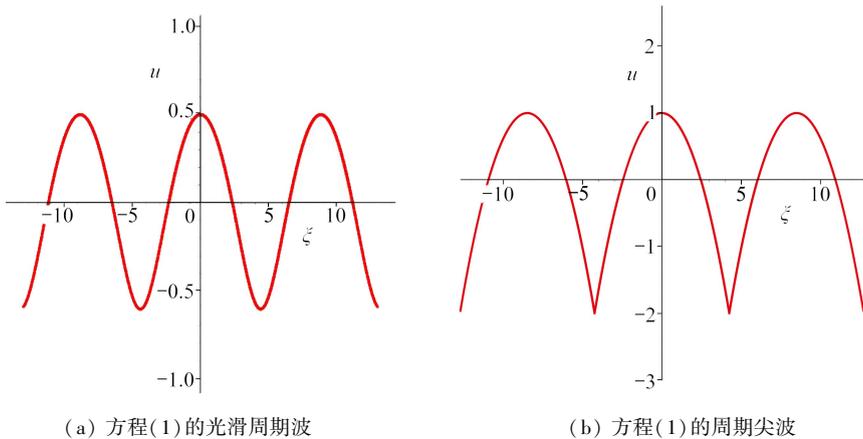
积分得到极限波(周期尖波)的显式表达式:

$$u(\xi) = \frac{c}{2} - \frac{(\xi - nT)^2}{6}, \quad \frac{2n - 1}{2} T \leq \xi \leq \frac{2n + 1}{2} T, \quad (13)$$

其中

$$T = 2\sqrt{3} \int_{-c}^{c/2} \frac{du}{\sqrt{c - 2u}} = 6\sqrt{c} \quad (14)$$

为周期尖波的周期. 周期尖波(13)的图形如图 2(b) 所示. 由于大多数可积非线性波方程具有光滑周期波, 所以周期尖波的存在是非常有趣的现象. 由文献[15-19] 可知周期尖波解在某些点的一阶导数是不存在的.



(a) 方程(1)的光滑周期波 (b) 方程(1)的周期尖波
(a) The profile of the smooth periodic wave of eq.(1) (b) The profile of the periodic cusp wave of eq.(1)

图2 方程(1)的光滑周期波和周期尖波

Fig. 2 The profile of the smooth periodic wave and the periodic cusp wave of eq.(1)

3 光滑周期波的波长与能量水平

本节研究 Vakhnenko 方程(1)的光滑周期行波解的周期 T (或波长 λ) 对能量水平 h 的依赖性. 主要结果表明周期函数 $T(h)$ 是单调的, 即下面的定理.

定理 1 若 $c > 0$, 则周期函数 $T(h)$ 是单调递减的.

为了证明该定理, 首先证明解析微分系统(9)满足假设(H), 那么关于周期函数的导数有以下结果.

引理 1 若 $c > 0$, 则系统(9) 在中心满足 $\lim_{h \rightarrow h_s} T'(h) = -\infty$, 其中 $h_s = c^3/6$ 是外轨道 P 的能量水平.

证明 应用命题 3, 取

$$A(u) = \frac{c}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3, \quad C(u) = \frac{1}{2}(u+c)^2,$$

积分因子 $K(u) = (u+c)^2$, 那么有

$$T'(h) = \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} G(u) \frac{du}{y},$$

其中

$$G(u) = \frac{u}{6(u+c)}.$$

若 $h \in (0, c^3/6)$, 则 $h - A(u) = (1/3)(u_1 - u)(u - u_0)(u - u_m)$, 其中 $u_m < -c < u_0 < 0 < u_1$. 特别地, 周期轨道 γ_h 在 u 轴上的投影区间为 $[u_0, u_1]$ (参照图 3, 其中 a 为波高, ρ 为正半高 (即 $\rho = u_1$)). 因此 $T'(h) = (2/h)(I_1(h) + I_2(h))$, 其中

$$I_1(h) = \int_{u_0}^0 f(u, h) du, \quad (15)$$

$$I_2(h) = \int_0^{u_1} f(u, h) du, \quad (16)$$

而

$$f(u, h) = \frac{G(u) \sqrt{C(u)}}{\sqrt{h - A(u)}} = \frac{\sqrt{6}u}{12\sqrt{(u_1 - u)(u - u_0)(u - u_m)}}. \quad (17)$$

记

$$f(u, h) = \frac{f_1(u, h)u}{\sqrt{(u - u_0)(u - u_m)}},$$

其中

$$f_1(u, h) = \frac{\sqrt{6}}{12\sqrt{u_1 - u}}. \quad (18)$$

由于 $f_1(u, h)$ 在区间 $[-c, 0] \times (0, h_s]$ 上是一个连续函数, 因此, 存在 $K_1 \in \mathbf{R}_+$ 使得 $K_1 = \max \{f_1(u, h); (u, h) \in [-c, 0] \times [h_s/2, h_s]\}$. 从而对于 $h \in [h_s/2, h_s]$, 有

$$I_1(h) \leq K_1 \left(\sqrt{u_0 u_m} + \frac{u_0 + u_m}{2} \ln \left(\frac{-u_0 - u_m + 2\sqrt{u_0 u_m}}{u_0 - u_m} \right) \right). \quad (19)$$

当 $h \rightarrow h_s$ 时, $u_m \rightarrow -c \leftarrow u_0$, 从而得到

$$\lim_{h \rightarrow h_s} I_1(h) = -\infty. \quad (20)$$

为了研究 $I_2(h)$, 令 $f(u, h) = f_2(u, h)u / \sqrt{u_1 - u}$, 其中

$$f_2(u, h) = \frac{\sqrt{6}}{12\sqrt{(u - u_0)(u - u_m)}}. \quad (21)$$

由于 $f_2(u, h)$ 在区间 $[0, c/2] \times (0, h_s]$ 上是一个连续函数, 因此, 存在 $K_2 \in \mathbf{R}_+$ 使得 $K_2 = \max \{f_2(u, h); (u, h) \in [0, c/2] \times [h_s/2, h_s]\}$. 从而对于 $h \in [h_s/2, h_s]$, 有

$$I_2(h) \leq K_2 \int_0^{u_1} \frac{udu}{\sqrt{u_1 - u}} = \frac{4}{3} K_2 u_1 \sqrt{u_1} < \frac{1}{3} K_2 c \sqrt{2c}. \quad (22)$$

上述不等式与式(20)联立可使结果得证.

定理 1 的证明 平面微分系统(9)在远离直线 $u = -c$ 时是解析的. 可以很容易地验证它满足假设(H), 其中

$$A(u) = \frac{c}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3, B(u) = 0, C(u) = \frac{1}{2}(u+c)^2, K(u) = (u+c)^2.$$

通过观察可得,若 $B = 0$, 则假设(H)表明对合 σ 由 $A = A \circ \sigma$ 定义.在此情形,可很容易地得到

$$A(u) - A(z) = \frac{1}{6}(u-z)S(u,z), \quad (23)$$

其中

$$S(u,z) = 2u^2 + 3uc + 2uz + 3cz + 2z^2. \quad (24)$$

从而可得

$$\sigma(u) = -\frac{1}{2}u - \frac{3}{4}c + \frac{1}{4}\sqrt{9c^2 - 12uc - 12u^2}. \quad (25)$$

由命题 2, 将使用 $S(u, \sigma(u)) = 0$.

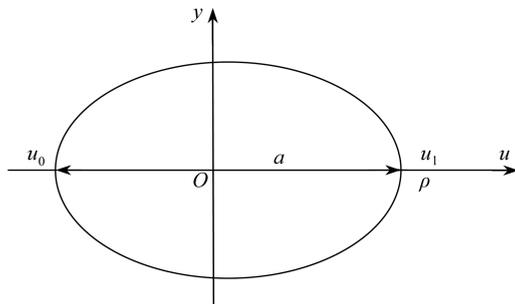


图 3 系统(9)的周期轨道 γ_u

Fig. 3 Periodic orbit γ_u of system (9)

周期环的投影为 $(-c, c/2)$, 其中 $A(c/2) = A(-c)$. 由命题 1 和命题 2 可知, 必须使用 l_2 , 因为 l_1 不能提供什么有用的信息. 可以验证

$$l_2(u) = \frac{\sqrt{2}(7u^2 + 15cu + 9c^2)}{36(u+c)^3}. \quad (26)$$

从而 $L(u, l_2(u)) \equiv 0$, 其中

$$L(u, y) = 36(u+c)^3y - \sqrt{2}(7u^2 + 15cu + 9c^2). \quad (27)$$

计算可得

$$Res_z(L(u, z), L(y, z)) = -36\sqrt{2}(u-y)\hat{T}(u, y), \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{T}(u, y) = & 7u^2y^2 + 15cyu^2 + 15cy^2u + 9c^2u^2 + \\ & 33c^2uy + 9c^2y^2 + 20c^3u + 20c^3y + 12c^4. \end{aligned} \quad (29)$$

最终

$$R(u) = Res_y(S(u, y), \hat{T}(u, y)) = (u+c)^2r(u), \quad (30)$$

其中

$$r(u) = 108c^6 - 12c^5u - 455c^4u^2 - 263c^3u^3 + 501u^4c^2 + 616u^5c + 196u^6. \quad (31)$$

由 Sturm 定理, 可以证明 $r(u)$ 在 $(-c, 0)$ 上的零点的数目为 0. 因此, 由命题 1, 可以断言周期函数是单调的. 另一方面, 由引理 1 可得, 当 h 趋近于 h_s 时, $\lim T'(h) = -\infty$. \square

4 光滑周期波的波长与波高

在每一个周期内,光滑周期行波解都有唯一的最大值和最小值.最大值(波峰)和最小值(波谷)之间的差称为波高,见图4,用 a 表示(在某些情况下这个量也称为振幅).设 u 是微分方程(1)的光滑周期行波解,由第3节可知 $(u, y) = (u, u')$ 是平面微分系统(9)的周期环 P 内侧的一个周期轨道,用 γ_u 表示.由于 H 是系统(9)的首次积分, γ_u 由水平曲线 H 确定,能量水平用 h 表示.此外,令式(9)的中心在水平曲线 $H = 0$ 内,并假设 $H(P) = (0, h_s)$,则 $h \in (0, h_s)$.

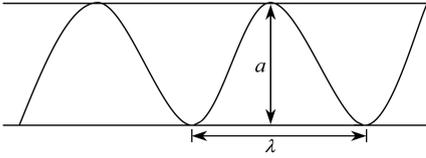


图4 波长为 λ 和波高为 a 的光滑周期波

Fig. 4 A smooth periodic wave with wave length λ and wave height a

下面将研究周期波 u 具有一个小的振幅时,讨论周期函数的展开形式.也就是说,波高 $a = u_1 - u_0$ 趋于0,其中 $u_1 = \max u, u_0 = \min u$.从而,式(9)关于 u 的周期轨道完全包含在中心 $(0, 0)$ 的一个小的邻域内.受Holm-Staley b 方程^[20]周期函数研究启发,回顾一下周期函数的展开式:

$$T(\xi) = T_0 + T_{2k}\rho^{2k} + T_{2k+1}\rho^{2k+1} + T_{2k+2}\rho^{2k+2} + \dots,$$

其中,正半高 ρ ($\rho = u_1$)是指中心 $(0, 0)$ 与周期轨道和 u 轴交点 $(u_1, 0)$ 之间的距离.这个级数总有偶次项系数 T_{2k} ($k = 1, 2, \dots$),称为第 k 个等时常数.也就是说 $T_{2k} = 0$ 暗示着 $T_{2k+1} = 0$.如果所有的等时常数为0,则围绕中心的所有轨道有一个共同的周期 T_0 ,称中心为等时中心.

定理2 若 $c > 0$,则周期 T 具有以下展开式:

$$T = 2\sqrt{c}\pi \left(1 - \frac{1}{12c^2}\rho^2 + O(\rho^3) \right). \quad (32)$$

从而对于充分小的 $\rho > 0$,有 $T_0 = 2\sqrt{c}\pi, T'(\rho) < 0$,也就是说,周期函数 T 在 $\rho = 0$ 的充分小右邻域内是单调递减的.

证明 取一个充分小的 ρ ,令 $\rho = u_1$,则

$$u_0 = \Phi(\rho) = -\rho + p_2\rho^2 + p_3\rho^3 + O(\rho^4). \quad (33)$$

由 $H(u_0, 0) = H(u_1, 0)$,可得

$$p_2 = -\frac{2}{3c}, p_3 = -\frac{4}{9c^2}.$$

定义

$$F(u) = \frac{2h - 2A(u)}{(u + c)^2}, \quad (34)$$

则式(11)变为 $y^2 = F(u)$,并且周期函数由以下式子确定:

$$T = 2 \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}. \quad (35)$$

在式(35)中作变量变换

$$u = \frac{u_1 - u_0}{2}z + \frac{u_1 + u_0}{2}, \quad (36)$$

可得

$$T = \int_{-1}^1 \frac{(u_1 - u_0) dz}{\sqrt{F(z, \rho)}}, \quad (37)$$

其中

$$F(z, \rho) = F\left(\frac{\rho - \Phi(\rho)}{2}z + \frac{\rho + \Phi(\rho)}{2}\right) = F(M). \quad (38)$$

条件 $F(u_0) = F(u_1) = 0$ 暗示了当 $M = \rho, M = \Phi(\rho)$ 时 $F = 0$, 因此利用 M 的解析性, 可以重写 F 为

$$F = (M - \rho)(\Phi(\rho) - M)(A_0 + A_1M + A_2M^2 + \dots) = \frac{1}{4}(\rho - \Phi(\rho))^2(1 - z^2)(A_0 + A_1M + A_2M^2 + \dots). \quad (39)$$

接下来, 利用式(34)可得

$$F = (M + c)^{-2}\left(c\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3 - cM^2 - \frac{2}{3}M^3\right) = c^{-2}\left(1 - \frac{2M}{c} + \frac{3M^2}{c^2} - \frac{4M^3}{c^3} + \dots\right)\left(c\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3 - cM^2 - \frac{2}{3}M^3\right). \quad (40)$$

比较 $M^j (j = 0, 1, 2)$ 的对应系数, 可以得到 A_j 的下列公式:

$$-\rho\Phi A_0 = c^{-2}\left(c\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3\right), \quad (41)$$

$$-\rho\Phi A_1 + (\Phi + \rho)A_0 = -2c^{-3}\left(c\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3\right), \quad (42)$$

$$-\rho\Phi A_2 + (\Phi + \rho)A_1 - A_0 = c^{-2}\left(3c^{-2}\left(c\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3\right) - c\right). \quad (43)$$

计算得

$$A_0 = c^{-1} + c^{-1}p_3\rho^2 + O(\rho^3), \quad (44)$$

$$A_1 = -2c^{-2} - c^{-1}p_2 + O(\rho^2), \quad (45)$$

$$A_2 = c^{-1}p_3 + \frac{4}{3}c^{-2}p_2 + 3c^{-3} + O(\rho). \quad (46)$$

另一方面, 由

$$M = \frac{\rho - \Phi(\rho)}{2}z + \frac{\rho + \Phi(\rho)}{2}$$

可得

$$M = \frac{1}{2}(2\rho - p_2\rho^2 - p_3\rho^3)z + \frac{1}{2}(p_2\rho^2 + p_3\rho^3) + O(\rho^4), \quad (47)$$

$$M^2 = \rho^2(1 - p_2\rho)z^2 + \rho^3p_2z + O(\rho^4). \quad (48)$$

从而, 通过直接计算, 可以得到表达式:

$$A_0 + A_1M + A_2M^2 + O(M^3) = c^{-1}(1 + a_1z\rho + (b_0 + b_1z + b_2z^2)\rho^2 + O(\rho^3)), \quad (49)$$

其中

$$a_1 = -\frac{4}{3c}, b_0 = p_3 - \frac{2}{3c}p_2, b_1 = \frac{2}{3c}p_2, b_2 = \frac{5}{3c^2}.$$

接着, 由模 z 的奇次项, 可以得到

$$(1 + a_1z\rho + (b_0 + b_1z + b_2z^2)\rho^2 + \dots)^{-1/2} = 1 + \left(\frac{3}{8}a_1^2z^2 - \frac{1}{2}b_0 - \frac{1}{2}b_2z^2\right)\rho^2 + O(\rho^3). \quad (50)$$

从而可以得到

$$\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{F(z, \rho)}} = 2\sqrt{c} \cdot \frac{1 + ((3/8)a_1^2 z^2 - (1/2)b_0 - (1/2)b_2 z^2)\rho^2 + O(\rho^3)}{\sqrt{1 - z^2}}. \quad (51)$$

因此,由式(37)得

$$T = 2\sqrt{c} \pi \left(1 - \frac{1}{12c^2} \rho^2 + O(\rho^3) \right). \quad (52)$$

□

下面的结果确立了方程(1)的光滑周期波解的波高和对应的周期轨道(9)的能量水平之间的关系。

定理 3 假设式(3)的光滑周期行波解 u 是非空的,那么下列结论成立:

(a) 周期轨道 γ_u 的周期等于 u 的波长。

(b) 存在一个连续的函数 $g: (0, h_s) \rightarrow (0, a_M)$, 对所有的 u 满足 $g(h) = a$, 其中 $a_M = 3c/2$ 。此外, g 是单调递增的, 并且可以通过令 $g(0) = 0$, 将函数 g 解析延拓到 $h = 0$ 。

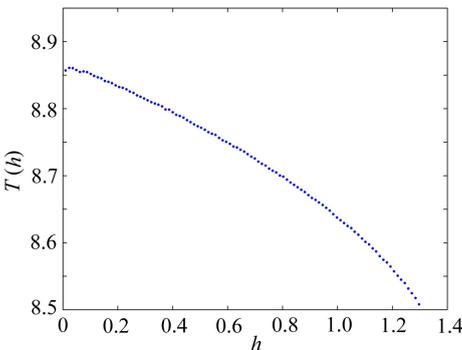
证明 结论(a)显然成立。结论(b)证明的关键在于周期轨道 γ_u 在 u 轴上的投影长度为 a 。为了便于计算, 设微分系统(9)的中心在点 $(0, 0)$ 。令 (u_0, u_1) 是周期环 P 在 u 轴上的投影。从而对于所有的 $u \in (u_0, u_1) \setminus \{0\}$ 有 $u_0 < 0 < u_1$, $A'(u) \neq 0$, 而 $A'(0) = 0$, $A''(0) \neq 0$ 。在方程(10)中, 令 $H(u_0, 0) = H(u_1, 0) = h$, 可得

$$h = A_1(u_0) = \frac{c}{2} u_0^2 + \frac{1}{3} u_0^3, \quad u_0 \in (-c, 0), \quad (53)$$

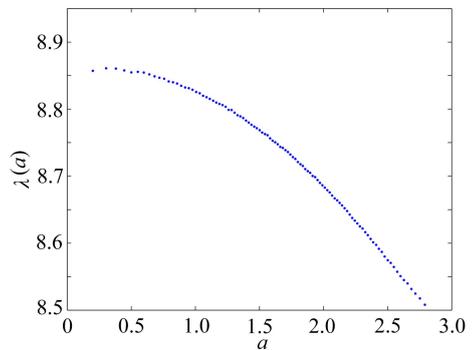
$$h = A_2(u_1) = \frac{c}{2} u_1^2 + \frac{1}{3} u_1^3, \quad u_1 \in \left(0, \frac{1}{2}c\right). \quad (54)$$

显然, 函数 $h = A_1(u_0)$ 和 $h = A_2(u_1)$ 分别是单调递减和单调递增的。由逆函数定理可得, 存在单调递减函数 $u_0 = A_1^{-1}(h)$ 和单调递增函数 $u_1 = A_2^{-1}(h)$ 。由于轨道 γ_u 相交于 u 轴上的点为 $(u_0, 0)$ 和 $(u_1, 0)$, 则 u 轴上的投影长度为 $a = g(h) := A_2^{-1}(h) - A_1^{-1}(h)$, 容易得 g 在 $(0, h_s)$ 是单调递增的连续函数, 设 $g(0) = 0$, 可以解析延拓到 $h = 0$, 从而结论(b)得证。□

结合定理 2, 定理 3 和定理 1, 可以获得本文的主要结果。



(a) 定理 1 对应的周期函数 $T(h)$ 的图形
(a) The graph of periodic function $T(h)$ corresponding to theorem 1



(b) 定理 4 对应的波长函数 $\lambda(a)$ 的图形
(b) The graph of wave length function $\lambda(a)$ corresponding to theorem 4

图 5 Vakhnenko 方程的周期函数和波长函数曲线

Fig. 5 The graphs of the periodic function and the wave length function for the Vakhnenko equation

定理 4 若 $c > 0$, 则周期波的波长 $\lambda(a)$ 在区间 $(0, 3c/2)$ 由 $2\pi\sqrt{c}$ 单调递减到 $6\sqrt{c}$ 。

结合定理 1 和定理 4, 可以得到如图 5 所示的周期函数 $T(h)$ 和波长函数 $\lambda(a)$ 的图像.

5 与 KdV 方程和 Camassa-Holm 方程的比较

KdV 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (55)$$

由 Boussinesq 在 1877 年首次提出, 后来, 在 1895 年由荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries 进一步完善, 该方程是表面水波传播的近似描述. 令方程(55)的行波解为

$$u(x, t) = u(\xi) = u(x - ct), \quad (56)$$

其中 c 是速度, 将式(56)代入式(55)积分一次, 得到一个二阶常微分方程:

$$u'' + \frac{1}{2}u^2 - cu = 0. \quad (57)$$

令 $u' = y$, 则方程(57)等价于平面系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = y, \\ \frac{dy}{d\xi} = cu - \frac{1}{2}u^2. \end{cases} \quad (58)$$

系统(58)的首次积分为

$$H(u, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{c}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3. \quad (59)$$

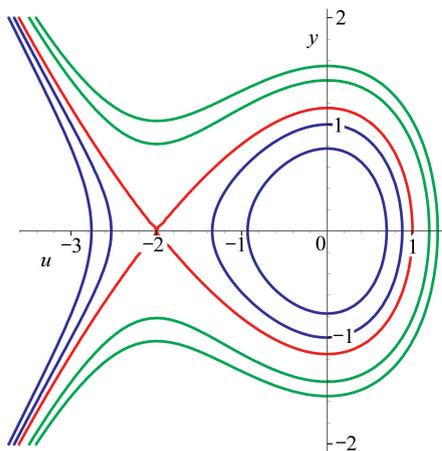


图 6 当 $c < 0$ 时, 系统(58)的相图

Fig. 6 The phase portrait of system (58) for $c < 0$

若 $c < 0$, 则 $O(0,0)$ 是系统(58)的中心, $P(2c,0)$ 是鞍点, 原点周围的周期环由系统(58)的一个同宿轨道包围, 相图如图 6 所示. $H(u, y) = h$ 确定了系统(58)的周期轨道, 其中 $h \in (0, h_s)$, $h_s = -2c^3/3$. 光滑周期波解可以写为以下 Jacobi(雅可比)椭圆函数形式:

$$u(\xi) = \beta_1 - (\beta_1 - \beta_2) \operatorname{sn}^2\left(\frac{\sqrt{3(\beta_1 - \beta_3)}}{6} \xi, k\right), \quad (60)$$

其中

$$\beta_1 > 0 > \beta_2 > \beta_3, (\beta_1 - u)(u - \beta_2)(u - \beta_3) = 6h + 3cu^2 - u^3, k^2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3}.$$

由于椭圆正弦函数 $\text{sn}(\cdot)$ 的基本周期为 $4K$, 其中

$$K = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \quad (61)$$

为第一类完全椭圆积分, 它满足周期行波解 $u(\xi)$ 在式(57)中有基本周期 T (或者波长 λ). 若 $h \rightarrow h_s$ 则 $\beta_3 \rightarrow 2c \leftarrow \beta_2, k \rightarrow 1, K(k) \rightarrow +\infty$. 因此 $h \rightarrow h_s$ 时, $T \rightarrow +\infty$.

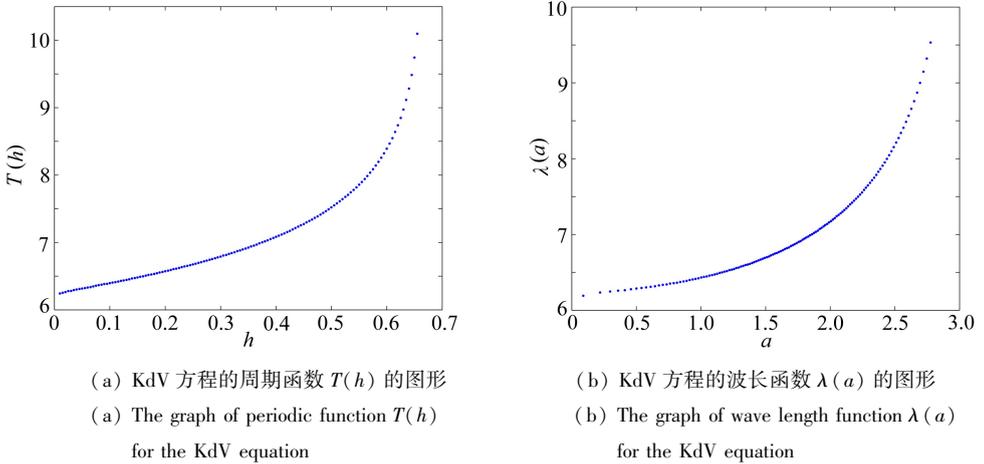


图7 KdV 方程的周期函数和波长函数曲线

Fig. 7 The graphs of the periodic function and the wave length function for the KdV equation

对于 KdV 方程, 理论分析和数值模拟(参照图 7)表明, 周期函数 $T(h)$ 和波长函数 $\lambda(a)$ 单调递增到无穷. 然而, 对于 Vakhnenko 方程, 由定理 4 可知, 波长 $\lambda(a)$ 从 $2\pi\sqrt{c}$ 单调递减到 $6\sqrt{c}$. 这表明对于固定波速 c , Vakhnenko 方程不存在任意小或任意大波长的光滑周期行波解.

Camassa-Holm (CH) 方程

$$u_t + 2ku_x - u_{txx} + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (62)$$

描述了不可压缩流体的传播. Geyer 和 Villadelprat 在文献[14]中表明 $\lambda(a)$ 在某些特定的参数下是单峰的, 即存在一个唯一的临界周期. 然而, 对于 Vakhnenko 方程, 本文的研究结果表明波长函数 $\lambda(a)$ 是单调递减的.

6 总 结

本文研究了 Vakhnenko 方程的光滑周期行波解的波长与能量水平及波高的关系. 通过变量变换, Vakhnenko 方程可以转化为一个平面多项式微分系统. 利用动力系统的临界周期分支方法研究这个多项式微分系统, 最终获得了周期函数 $T(h)$ 或波长函数 $\lambda(a)$ 的单调性质. 此外, 给出了波长函数在零点附近的显式展开式, 从而获得波长函数的更多信息. 与 KdV 方程比较, 波长函数 $\lambda(a)$ 单调递减到一个有限的数, 而不是单调递增到无穷. 结果表明, 对于固定波速 c , Vakhnenko 方程不存在任意小或任意大波长的光滑周期行波解. 利用波长函数的单调性, 结合微分算子的谱理论, 有望获得 Vakhnenko 方程的光滑周期行波解的轨道稳定性结果.

参考文献 (References):

- [1] Vakhnenko V O. Solitons in a nonlinear model medium[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1992, 25(15): 4181-4187.

- [2] Vakhnenko V O, Parkes E J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation[J]. *Nonlinearity*, 1998, **11**(6): 1457-1464.
- [3] Morrison A J, Parkes E J, Vakhnenko V O. The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation[J]. *Nonlinearity*, 1999, **12**(5): 1427-1437.
- [4] Chow S N, Sanders J A. On the number of critical points of the period[J]. *Journal of Differential Equations*, 1986, **64**(1): 51-66.
- [5] Chicone C, Jacobs M. Bifurcation of critical periods for plane vector fields[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, **312**(2): 433-486.
- [6] Sabatini M. On the period function of Liénard systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 1999, **152**(2): 467-487.
- [7] ZHAO Yu-lin. The monotonicity of the period function for codimension four quadratic system Q_4 [J]. *Journal of Differential Equations*, 2002, **185**(1): 370-387.
- [8] LI Cheng-zhi, LU Ke-ning. The period function of hyperelliptic Hamiltonians of degree 5 with real critical points[J]. *Nonlinearity*, 2008, **21**(3): 465-483.
- [9] Gasull A, LIU Chang-jian, YANG Jia-zhong. On the number of critical periods for planar polynomial systems of arbitrary degree[J]. *Journal of Differential Equations*, 2010, **249**(3): 684-692.
- [10] CHEN Xing-wu, Romanovski V G, ZHANG Wei-nian. Critical periods of perturbations of reversible rigidly isochronous centers[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **251**(6): 1505-1525.
- [11] Garijo A, Villadelpra J. Algebraic and analytical tools for the study of the period function[J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, **257**(7): 2464-2484.
- [12] Constantin A. The trajectories of particles in Stokes waves[J]. *Inventiones Mathematicae*, 2006, **166**(3): 523-535.
- [13] CHEN Ai-yong, LI Ji-bin, HUANG Wen-tao. The monotonicity and critical periods of periodic waves of the φ^6 field model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, **63**(1/2): 205-215.
- [14] Geyer A, Villadelprat J. On the wave length of smooth periodic traveling waves of the Camassa-Holm equation[J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, **259**: 2317-2332.
- [15] LI Ji-bin. *Singular Nonlinear Travelling Wave Equations: Bifurcations and Exact Solutions* [M]. Beijing: Science Press, 2013.
- [16] LI Ji-bin, CHEN Guan-rong. On a class of singular nonlinear traveling wave equations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2007, **17**(11): 4049-4065.
- [17] LI Ji-bin, DAI Hui-hui. *On the Study of Singular Nonlinear Traveling Wave Equations: Dynamical System Approach* [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [18] CHEN Ai-yong, WEN Shuang-quan, TANG Sheng-qiang, HUANG Wen-tao, QIAO Zhi-qun. Effects of quadratic singular curves in integrable equations[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2015, **134**(1): 24-61.
- [19] 李春海, 朱文静, 陈爱永, 王红浩. 浅水中度振幅孤立波解的分支[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(9): 1002-1010. (LI Chun-hai, ZHU Wen-jing, CHEN Ai-yong, WANG Hong-hao. Bifurcations of solitary wave solutions of moderate amplitude in shallow water[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1002-1010. (in Chinese))
- [20] Christov O, Hakkaev S, Iliev I D. Non-uniform continuity of periodic Holm-Staley b -family of equations[J]. *Nonlinear Analysis*, 2010, **75**(13): 4821-4838.

Wave Lengths of Periodic Waves for the Vakhnenko Equation

GUO Li-na¹, CHEN Ai-yong¹, HUANG Wen-tao^{1,2}

(1. *School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of*

Electronic Technology, Guilin, Guangxi 541004, P.R.China;

2. *Department of Mathematics, College of Science,*

Hezhou University, Hezhou, Guangxi 542800, P.R.China)

Abstract: The wave lengths of smooth periodic traveling wave solutions to the Vakhnenko equation were studied. The Vakhnenko equation was reduced to a planar polynomial differential system through the transformation of variables. The polynomial differential system was treated with the critical period bifurcation method based on the dynamical system theory. The main results involve the monotonicity properties of periodic function $T(h)$ (or wave length function $\lambda(a)$). In comparison with the wave length for the KdV equation, wave length function $\lambda(a)$ monotonically decreases to a finite value rather than monotonically increases to infinity. This shows that, for fixed wave speed c , there exist no smooth periodic wave solutions with arbitrarily small wave lengths or arbitrarily large wave lengths, to the Vakhnenko equation.

Key words: Vakhnenko equation; periodic wave; periodic function; wave length; monotonicity

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11361017)

引用本文/Cite this paper:

郭丽娜, 陈爱永, 黄文韬. Vakhnenko 方程的光滑周期波的波长[J]. 应用数学和力学, 2016, 37(7): 678-690.

GUO Li-na, CHEN Ai-yong, HUANG Wen-tao. Wave lengths of periodic waves for the Vakhnenko equation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(7): 678-690.