文章编号:1000-0887(2016)07-0691-08


# 一类奇异摄动燃烧模型的渐近解*

史娟荣[1,2], 莫嘉琪[3]

(1. 安徽机电职业技术学院, 安徽 芜湖 241002;
2. 上海交通大学 数学系, 上海 200240;
3. 安徽师范大学 数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241003)

**摘要:** 讨论了一类具有两参数的非线性奇异摄动的燃烧模型.首先,利用摄动方法, 得到了燃烧模型的外部解;其次,引入一个伸长变量, 构造了燃烧模型解的初始层的校正项; 然后, 利用多重尺度方法和合成展开方法构造了模型解的边界层校正项, 并由此得到了原初始-边值问题的渐近解;最后,利用微分不等式相关的理论证明了所得到的渐近解的一致有效性.用该文的求解方法简单而可行.

**关 键 词:** 燃烧模型; 渐近解; 奇异摄动
**中图分类号:** O175.14 **文献标志码:** A
doi: 10.21656/1000-0887.360293

## 引 言

非线性奇异摄动理论为学术界一个非常重视的问题,并已有很多行之有效的工作[1-8].一些非线性奇异摄动问题的近似解法已有了很深入的研究,譬如修正合成展开法、边界层内部层法、积分平均法、匹配渐近展开法和改进的多重尺度方法等.文献[9-19]利用微分不等式理论、不动点理论、变分迭代理论、泛函分析同伦映射方法等研究了有关的奇异摄动非线性问题.本文研究具有两参数的奇异摄动燃烧问题模型.

燃烧问题在热力学、流体动力学、理论物理、凝聚态物理学、航空航天技术、应用化学、生态环境、工程冶炼等学科中都有很重要的应用.今讨论如下一类两参数燃烧初始边值问题模型[3]:

$$\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\varepsilon^2Lu=F(t,x,u,\varepsilon,\mu),\qquad (t,x)\in(0,T_0)\times\partial\Omega,\tag{1}$$

$$u=A(t,x,\varepsilon,\mu),\qquad x\in\partial\Omega,\tag{2}$$

$$u\big|_{t=0}=B(x,\varepsilon,\mu),\tag{3}$$

其中, $u$ 为燃烧火焰密度函数,$t$ 表示时间变量, $T_0$ 是足够大的正常数, $x=(x_1,x_2,,x_3)\in\bar{\Omega}\subset$

* **收稿日期:** 2015-10-27; **修订日期:** 2015-11-27
**基金项目:** 国家自然科学基金(41275062;11202106);安徽省高等学校省级自然科学研究项目(KJ2015A418);国家高级访问学者项目
**作者简介:** 史娟荣(1981—),女,副教授,硕士(E-mail: ahjdshjr@126.com);
莫嘉琪(1937—),男,教授(通讯作者. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn).

$R^3$ 是三维空间变量, $\partial\Omega$ 为燃烧问题有界区域 $\Omega$ 的二维光滑边界, $\varepsilon,\mu$ 代表燃烧火焰的密度和反应速度的扩散率, 设它们是正的小参数, $L$ 表示在闭区域 $\bar{\Omega}$ 上的一致椭圆型算子

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \sum_{i=1}^{3} y_i y_j \geqslant \sum_{i=1}^{3} b_i y_i^2, \qquad y_i \in \mathbf{R},\ b_i > 0\ (i = 1,2,3),$$

而 $A$ 和 $B$ 为燃烧火焰密度的边界及初始状态, 非线性函数 $F$ 为燃烧火焰的燃料和氧化物的密度和位置在所讨论的区域范围内非线性交互情况的扰动函数.本文是涉及具有微扰燃烧火焰密度的速率情形下燃烧密度的反应扩散初始边值问题(1)~(3)的渐近解及其相关性态.设:

H1 两小参数 $\varepsilon,\mu$ 满足 $\lim\limits_{\mu\to 0}\dfrac{\varepsilon^2}{\mu} = 0$;

H2 $A$, $B$ 和 $F$ 在对应的自变量变化范围内为充分光滑的有界函数;

H3 $F_u \leqslant -\delta < 0$, 其中 $\delta$ 为正常数.

# 1 燃烧问题外部解

由假设, 燃烧问题(1)~(3)的退化方程

$$F(t,x,u,0,0) = 0$$

有解 $U_{00}(t,x)$.现在来构造燃烧模型初始边值问题(1)~(3)的外部解 $U(t,\varepsilon,\mu)$.设

$$U(t,\varepsilon,x,\mu) = \sum_{i,j=0}^{\infty} U_{ij}(t,x)\varepsilon^i\mu^j. \tag{4}$$

将式(4)代入燃烧方程(1), 并按 $\varepsilon,\mu$ 的幂展开扰动函数 $F$,且合并方程中 $\varepsilon^i\mu^j$ 的同次幂项, 并令对应的各项系数为 0, 可依次得到

$$F_u(t,x,0,0)U_{ij}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}U_{i(j-1)}(t,x) - LU_{(i-2)j}(t,x) + \bar{F}_{ij},$$
$$i,\ j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0, \tag{5}$$

其中 $\bar{F}_{ij}$ 为逐次已知的函数.由式(5)得

$$U_{ij}(t,x) = \frac{1}{F_u(t,x,0,0)}\left[\frac{\partial}{\partial t}U_{i(j-1)}(t,x) - LU_{(i-2)j}(t,x) + \bar{F}_{ij}\right],$$
$$i,\ j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0. \tag{6}$$

于是, 将 $U_{00}(t,x)$ 及式(6) 表示的 $U_{ij}(t,x)(i,\ j = 0,1,\cdots;i + j \neq 0)$ 代入式(4), 便得到了燃烧模型初始边值问题(1)~(3)的外部解 $U(t,\varepsilon,x,\mu)$.但是, 它未必满足初始条件和边界条件(2) 和(3), 所以我们还需构造在 $t = 0$ 附近的初始层校正项 $V$ 以及在 $\partial\Omega$ 邻域的边界层校正项 $W$.

# 2 燃烧模型初始层校正项

今构造燃烧模型在初始时刻 $t = 0$ 附近的初始层校正项 $V$.作伸长变量[1-2]:

$$\tau = \frac{t}{\mu}, \tag{7}$$

并假设

$$u = U + V. \tag{8}$$

由式(7)、(8), 燃烧模型的方程(1)和初始条件(3)分别为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau}=\varepsilon^2 LV+F(\mu\tau,x,U+V,\varepsilon,\mu)-F(\mu\tau,x,U,\varepsilon,\mu),\tag{9}$$

$$V\big|_{\tau=0}=B(x,\varepsilon,\mu)-U\big|_{t=0}.\tag{10}$$

再令

$$V=\sum_{i,j=0}^{\infty}v_{ij}(\tau,x)\varepsilon^i\mu^j.\tag{11}$$

将式(11)代入方程(9)和初始条件(10)，并且按 $\varepsilon,\mu$ 的幂展开相应的非线性项,且合并方程中 $\varepsilon^i\mu^j$ 的同次幂项，并令对应的各项系数为 0，依次地有

$$\frac{\mathrm{d}v_{00}}{\mathrm{d}\tau}=F(0,x,U_{00}+v_{00},0,0)-F(0,x,U_{00},0,0),\tag{12}$$

$$v_{00}\big|_{\tau=0}=B(x,0,0)-U_{00}\big|_{t=0},\tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{ij}}{\mathrm{d}\tau}=F_u(0,x,U_{00},0,0)v_{ij}+G_{ij},\qquad i,j=0,1,\cdots;\ i+j\neq 0,\tag{14}$$

$$v_{ij}\big|_{\tau=0}=B_{ij}-U_{ij}\big|_{t=0},\qquad i,j=0,1,\cdots;\ i+j\neq 0,\tag{15}$$

其中 $G_{ij}(i,j=0,1,\cdots;\ i+j\neq 0)$ 为已知函数，它们的表示式从略，而

$$B_{ij}=\frac{1}{i!\ j!}\left[\frac{\partial^{i+j}B}{\partial\varepsilon^i\partial\mu^j}\right]_{\varepsilon=\mu=0}.$$

由假设，我们可以依次得到初始问题(12)、(13)和(14)、(15)的解 $v_{ij}(i,j=0,1,\cdots)$，并具有如下性态：

$$v_{ij}=O(\exp(-\delta_{ij}\tau))=O\left(\exp\left(-\delta_{ij}\frac{t}{\mu}\right)\right),\qquad 0<\mu\ll 1;\ i,j=0,1,\cdots,\tag{16}$$

这里 $\delta_{ij}(i,j=0,1,\cdots)$ 为正常数.

将得到的解 $v_{ij}(i,j=0,1,\cdots)$ 代入式(11),便得到了燃烧模型的初始边值问题(1)~(3)的解在初始时刻 $t=0$ 附近的初始层校正项 $V$.

## 3 燃烧模型边界层校正项

作伸长变量[1-2]：

$$\xi_i=\frac{x_i}{\varepsilon},\qquad i=1,2,3.$$

这时燃烧问题的方程(1)为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}-\bar{L}u=F,\tag{17}$$

式中

$$\bar{L}=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}.$$

然后在边界 $\partial\Omega$ 的邻域中建立一个非奇局部坐标系$(r,\theta,\phi)$，在 $\partial\Omega$ 邻域的任一点 $Q$ 的坐标作如下定义：坐标 $r(\leqslant r_0)$ 为从 $Q$ 到边界 $\partial\Omega$ 的距离，这里 $r_0$ 为足够小的正常数，使得在 $\partial\Omega$ 的邻域 $\Omega_{r_0}$ 中在边界 $\partial\Omega$ 的每一点的内法线互不相交.$(\theta,\phi)$ 为在 $\partial\Omega$ 的邻域 $\Omega_{r_0}$ 上的一个二维流形 $\partial\Omega_{\bar{r}}(0\leqslant\bar{r}\leqslant r_0)$ 的非奇坐标系，使点 $Q$ 的坐标$(\theta,\phi)$ 就是点 $P$ 的坐标$(\theta,\phi)$，这里点 $P$ 是通过点 $Q$ 的内法线到边界 $\partial\Omega$ 的交点.这时在 $\partial\Omega$ 的邻域 $\Omega_{r_0}$ 上有

$$\bar{L} = \bar{a}_{33}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \bar{a}_{32}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \bar{a}_{31}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} + \bar{a}_{22}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \bar{a}_{21}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi} + \bar{a}_{11}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \bar{b}_3\frac{\partial}{\partial r} + \bar{b}_2\frac{\partial}{\partial\theta} + \bar{b}_1\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{18}$$

而 $\bar{a}_{33} > 0$, $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_i(i, j = 1, 2, 3;\ i + j \neq 0)$ 的结构从略.今在 $\partial\Omega$ 的邻域 $\Omega_{r_0}$ 上作多重尺度变量[1-2]:

$$\sigma = \frac{h(r,\theta,\phi)}{\varepsilon}, \qquad \tilde{r} = r,\ \tilde{\theta} = \theta,\ \tilde{\phi} = \phi,$$

其中 $h(r,\theta,\phi)$ 为待定函数, 它将在下面决定.为了书写方便, 以下仍用$(r,\theta,\phi)$ 来表示$(\tilde{r},\tilde{\theta},\tilde{\phi})$.由式(18),有

$$\bar{L} = \frac{1}{\varepsilon^2}K_0 + \frac{1}{\varepsilon}K_1 + K_2, \tag{19}$$

这里 $K_0 = \bar{a}_{33}h_r^2(\partial^2/\partial\sigma^2)$, 而 $K_1, K_2$ 的表示在此从略.

为了构造燃烧问题(1)~(3)的解的边界层校正项 $W$, 由式(18)和(19), 令

$$h(r,\theta,\phi) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{33}(r_1,\theta,\phi)}}\mathrm{d}r_1,$$

且设燃烧问题(1)~(3)的解 $u$ 为

$$u = U + V + W. \tag{20}$$

将式(20)代入问题(1)~(3),便有

$$\frac{\partial W}{\partial\tau} - \bar{L}W = -\frac{\partial(U+V)}{\partial\tau} + \bar{L}(U+V) + [F(\mu\tau,r,\theta,\phi,U+V+W,\varepsilon,\mu) - F(\mu\tau,r,\theta,\phi,U+V,\varepsilon,\mu)], \tag{21}$$

$$W = A(\mu\tau,x,\varepsilon,\mu) - U - V, \qquad x \in \partial\Omega, \tag{22}$$

$$W = -U,\ \tau = 0. \tag{23}$$

并设

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} w_{ij}(\tau,r,\theta,\phi)\varepsilon^i\mu^k. \tag{24}$$

将式(19)、(24)代入式(20)~(22),按 $\varepsilon,\mu$ 展开相应的非线性项,且令 $\varepsilon^i\mu^j$ 同次幂项的系数相等.按多重尺度法[1-2]得到

$$\frac{\partial w_{00}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial\sigma^2} = F(0,r,\theta,\phi,U_{00}+v_{00}+w_{00},0,0) - F(0,r,\theta,\phi,U_{00}+v_{00},0,0), \tag{25}$$

$$w_{00} = A(0,x,0,0) - U_{00}(0,x) - v_{00}(0,x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{26}$$

$$w_{00} = -U_{00}, \qquad \tau = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial\sigma^2} = \tilde{F}_{ij}, \qquad i, j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0, \tag{28}$$

$$w_{ij} = A_{ij} - U_{ij}(0,x) - v_{ij}(0,x), \qquad x \in \partial\Omega;\ i, j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0, \tag{29}$$

$$w_{ij} = -U_{ij}, \qquad \tau = 0;\ i, j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0, \tag{30}$$

这里 $\tilde{F}_{ij}(i, j = 0,1,\cdots;\ i + j \neq 0)$ 为逐次已知的函数, 它们的表示式在此从略, 且

$$A_{ij}=\frac{1}{i!\ j!}\left[\frac{\partial^{i+j}A}{\partial\varepsilon^{i}\partial\mu^{j}}\right]_{\varepsilon=\mu=0}.$$

由假设 H1~H3,可以看出燃烧模型初始边值问题(25)~(27)和(28)~(30)依次可得到解 $w_{jk}(j,k=0,1,\cdots)$,且在边界 $\partial\Omega$ 附近满足性态

$$w_{ij}=O(\exp(-\bar{\delta}_{ij}\sigma))=O\left(\exp\left(-\bar{\delta}_{ij}\frac{r}{\varepsilon}\right)\right),\qquad 0<\varepsilon,\mu\ll 1,\tag{31}$$

其中 $\bar{\delta}_{ij}(i,j=0,1,2,\cdots)$ 为正常数.设 $\bar{w}_{ij}=\psi w_{ij}$, 这里 $\psi(r)$ 为一个充分光滑的函数, 且满足

$$\psi(r)=\begin{cases}1, & 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{3}r_0,\\ 0, & \frac{2}{3}r_0\leqslant r\leqslant r_0.\end{cases}$$

下面仍将 $\bar{w}_{ij}$ 用 $w_{ij}$ 表示.我们便构造了燃烧问题的边界层校正项 $W$ 的展开式(24).于是由式(4)、(11)、(24)和(20), 我们有原两参数燃烧模型初始边值问题(1)~(3)解的形式渐近表示式:

$$u=\sum_{i,j=0}^{\infty}(U_{ij}+v_{ij}+w_{jk})\varepsilon^{i}\mu^{j},\qquad 0<\varepsilon,\mu\ll 1.\tag{32}$$

# 4 渐近解的一致有效性

**定理** 在假设 H1~H3 下, 两参数奇异摄动燃烧模型初始边值问题(1)~(3)存在一个解 $u$, 且在 $(t,x)\in[0,T_0]\times\bar{\Omega}$ 上关于 $\varepsilon,\mu$ 具有形如式(32)的一致有效的渐近展开式.

**证明** 构造辅助函数 $\alpha$ 和 $\beta$:

$$\alpha=Z_{mn}-\kappa\zeta,\ \beta=Z_{mn}+\kappa\zeta,\tag{33}$$

这里 $\kappa$ 为适当大的正常数,它将在下面选取,$\zeta=\max(\varepsilon^{m}\mu^{n},\varepsilon^{n}\mu^{m})$, 且

$$Z_{mn}\equiv\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(U_{ij}+v_{ij}+w_{ij})\varepsilon^{i}\mu^{j}.$$

显然

$$\alpha\leqslant\beta,\qquad (t,x)\in[0,T_0]\times\bar{\Omega},\tag{34}$$

$$\alpha\big|_{x\in\partial\Omega}\leqslant A(t,x,\varepsilon,\mu)\big|_{x\in\partial\Omega}\leqslant\beta\big|_{x\in\partial\Omega},\ \alpha\big|_{t=0}\leqslant B(x,\varepsilon,\mu)\leqslant\beta\big|_{t=0}.\tag{35}$$

现证

$$\mu\alpha_t-\varepsilon^2L\alpha-F(t,x,\alpha,\varepsilon,\mu)\leqslant 0,\qquad (t,x)\in(0,T_0)\times\Omega,\tag{36}$$

$$\mu\beta_t-\varepsilon^2L\beta-F(t,x,\beta,\varepsilon,\mu)\geqslant 0,\qquad (t,x)\in(0,T_0)\times\Omega.\tag{37}$$

可分如下 3 种情形来证明上述两个不等式:

(i) $0\leqslant r\leqslant(1/3)r_0$;

(ii) $(1/3)r_0<r<(2/3)r_0$;

(iii) $(2/3)r_0\leqslant r\leqslant r_0$.

但下面只推算情形(i),而情形(ii)和(iii)类似可证.

对于 $\varepsilon,\mu$ 足够小, 由假设有正常数 $C$, 使得

$$\mu\alpha_t-\varepsilon^2L\alpha-F(t,x,\alpha,\varepsilon,\mu)=$$

$$\mu\frac{\partial Z_{nm}}{\partial t}-\varepsilon^2LZ_{mn}-F(t,x,Z_{mn},\varepsilon,\mu)+$$

$$
\begin{aligned}
&[F(t,x,Z_{mn},\varepsilon,\mu) - F(t,x,Z_{mn} - \kappa\zeta)] \leqslant \\
&- F(t,x,u,0,0) + \sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{m}\sum_{j=0}^{n}\Big[- F_u(t,x,0,0)U_{ij}(t,x) + \\
&\frac{\partial}{\partial t}U_{i(j-1)}(t,x) + LU_{(i-2)j}(t,x) - \bar{F}_{ij}\Big]\varepsilon^i\mu^j = \\
&\left[\frac{\mathrm{d}v_{00}}{\mathrm{d}\tau} - F(0,x,U_{00} + v_{00},0,0) + F(0,x,U_{00},0,0)\right] + \\
&\sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}v_{ij}}{\mathrm{d}\tau} - F_u(0,x,U_{00},0,0)v_{ij} - G_{ij}\right]\varepsilon^i\mu^j + \frac{\partial w_{00}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial\sigma^2} - \\
&F(0,r,\theta,\phi,U_{00} + v_{00} + w_{00},0,0) + F(0,r,\theta,\phi,U_{00} + v_{00},0,0) - \\
&\sum_{\substack{i=0\\i+j>0}}^{m}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial w_{ij}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial\sigma^2} - \tilde{F}_{ij}\right]\varepsilon^i\mu^j - \kappa\delta\zeta + M\zeta = -(\kappa\delta - C)\zeta.
\end{aligned}
$$

取 $\kappa \geqslant C/\delta$，于是不等式(36)成立.同理可证不等式(37)也成立.由不等式(34)~(37)和微分不等式理论[3]，两参数奇异摄动燃烧模型初始边值问题(1)~(3)有一个解 $u$，且 $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$，$(t,x) \in [0,T_0] \times \bar{\Omega}$ 成立.再由式(33)，我们便得到

$$
u = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(U_{ij} + v_{ij} + w_{ij})\varepsilon^i\mu^j + O(\zeta), \qquad 0 < \varepsilon,\ \mu \ll 1.
$$

其中 $\zeta = \max(\varepsilon^m\mu^n, \varepsilon^n\mu^m)$.定理证毕.

## 5 结 论

奇异摄动广泛地出现在力学、物理、生态环境和工程等学科中.本文是研究一类具有两参数的非线性燃烧问题，利用奇异摄动方法和微分不等式理论得到了问题的渐近解析解.

燃烧问题在热力学、流体动力学、反应扩散、航天技术、工程冶炼等问题中都有很重要的应用.奇异摄动方法是一个近似解析解法.它不同于简单的数值模拟求解方法，由其得到解的近似表示式,可继续进行微分、积分等解析运算，从而可继续对相应问题的定性和定量方面的研究.在本文中利用了微分不等式理论证明了渐近解的一致有效性,得到了近似解的精度估计,证实了本文求解方法的可行性.

### 参考文献(References)：


[1] de Jager E M, JIANG Fu-ru. *The Theory of Singular Perturbation*[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing Co, 1996.

[2] Barbu L, Moroşanu G. *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems*[M]. Basel: Birkhauserm Verlag AG, 2007.

[3] Chang K W, Howes F A. *Nonlinear Singular Perturbation Phenomena: Theory and Applications*[M]. *Applied Mathematical Science*, Vol **56**. Springer-Verlag, 1984.

[4] Martínez S, Wolanski N. A singular perturbation problem for a quasi-linear operator satisfying the natural growth condition of Lieberman[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2009, **41**(1): 318-359.

[5] Kellogg R B, Kopteva N. A singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem in a polygonal domain[J]. *Journal of Differential Equations*, 2010, **248**(1): 184-208.

[6] TIAN Can-rong, ZHU Peng. Existence and asymptotic behavior of solutions for quasilinear parabolic systems[J]. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2012, **121**(1): 157-173.

[7] Skrynnikov Y. Solving initial value problem by matching asymptotic expansions[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2012, **72**(1): 405-416.

[8] Samusenko P F. Asymptotic integration of degenerate singularly perturbed systems of parabolic partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, **189**(5): 834-847.

[9] MO Jia-qi. Singular perturbation for a class of nonlinear reaction diffusion systems[J]. *Science in China*(*Ser A*), 1989, **32**(11): 1306-1315.

[10] MO Jia-qi, LIN Wan-tao. Asymptotic solution of activator inhibitor systems for nonlinear reaction diffusion equations[J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2008, **20**(1): 119-128.

[11] MO Jia-qi. Approximate solution of homotopic mapping to wave solitary for generalized nonlinear KdV system[J]. *Chinese Physics Letters*, 2009, **26**(1): 010204-1-010204-4.

[12] MO Jia-qi. Homotopic mapping solving method for gain fluency of a laser pulse amplifier[J]. *Science in China* (*Series G*): *Physics*, *Mechanics & Astronomy*, 2009, **39**(7): 1007-1010.

[13] MO Jia-qi, CHEN Xian-feng. Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation[J]. *Chinese Physics B*, 2010, **10**(10): 100203-1-100203-4.

[14] 莫嘉琪, 刘树德, 唐荣荣. 一类奇异摄动非线性方程 Robin 问题激波的位置[J]. 物理学报, 2010, **59**(7): 4403-4408.(MO Jia-qi, LIU Shu-de, TANG Rong-rong. Shock position for a class of Robin problems of singularly perturbed nonlinear equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(7): 4403-4408.(in Chinese))

[15] MO Jia-qi, CHEN Huai-jun. The corner layer solution of Robin problem for semilinear equation[J]. *Mathematica Applicata*, 2012, **25**(1): 1-4.

[16] MO Jia-qi, WANG Wei-gang, CHEN Xian-feng, SHI Lan-fang. The shock wave solutions for singularly perturbed time delay nonlinear boundary value problems with two papameters[J]. *Mathematica Applicata*, 2014, **27**(3): 470-475.

[17] 史娟荣, 石兰芳, 莫嘉琪. 一类非线性强阻尼扰动发展方程的解[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(9): 1046-1054.(SHI Juan-rong, SHI Lan-fang, MO Jia-qi. Solutions to a class of nonlinear strong-damp disturbed evolution equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(9): 1046-1054.(in Chinese))

[18] SHI Juan-rong, LIN Wan-tao, MO Jia-qi. The singularly perturbed solution for a class of quasilinear nonlocal problem for higher order with two parameters[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis*, 2015, **48**(1): 85-91.

[19] 史娟荣, 吴钦宽, 莫嘉琪. 非线性扰动广义 NNV 系统的孤立子渐近行波解[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(9): 1003-1010.(SHI Juan-rong, WU Qin-kuan, MO Jia-qi. Asymptotic travelling wave soliton solutions for nonlinear disturbed generalized NNV systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(9): 1003-1010.(in Chinese))

# Asymptotic Solutions to a Class of Singular Perturbation Burning Models

SHI Juan-rong[1,2], MO Jia-qi[3]

(1. *Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering*, *Wuhu*, *Anhui* 241002, *P.R.China*;
2. *Department of Mathematics*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *P.R.China*;
3. *School of Mathematics & Computer Science*, *Anhui Normal University*, *Wuhu*, *Anhui* 241003, *P.R.China*)

**Abstract**: A class of nonlinear singularly perturbed burning models with two parameters were discussed. Firstly, the outer solution to the burning model was constructed with the perturbation method. Secondly, through the introduction of a stretched variable, the initial layer correction term of the solution to the burning model was constructed. Then the multi-scale method and the composite expansion method were used to build the boundary layer correction term of the model solution and find the asymptotic solution to the original initial boundary value problem. Finally, the uniform validity of the obtained asymptotic solution was proved according to the theory of differential inequalities. The proposed solving method for this class of nonlinear singularly perturbed burning models is convenient and practicable.

**Key words**: burning model; asymptotic solution; singular perturbation

**Foundation item**: The National Natural Science Foundation of China(41275062;11202106)

引用本文/Cite this paper:

史娟荣, 莫嘉琪. 一类奇异摄动燃烧模型的渐近解[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(7): 691-698.

SHI Juan-rong, MO Jia-qi. Asymptotic solutions to a class of singular perturbation burning models [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(7): 691-698.