文章编号:1000-0887(2011)02-0232-09


# 分层不动点及变分不等式的粘性方法及应用*

张石生[1], 王雄瑞[1], 李向荣[2], 陈志坚[2]

(1. 宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007;
2. 香港理工大学 应用数学系,香港, 九龙)

(我刊编委张石生来稿)

**摘要:** 介绍了处理变分不等式问题的一种分层不动点的粘性方法. 这一方法所涉及的映像是非扩张的,而其解是从另一非扩张映像的不动点集中求出. 在文末,还把这一结果应用于研究单调变分不等式问题、凸规划问题、分层极小化问题及在不动点集上的二次极小化问题.

**关 键 词:** 分层不动点; 非扩张映像; 不动点; 粘性逼近; 分层极小化

**中图分类号:** O177.91  **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2011.02.011

## 1 引言及预备知识

在求解某些非线性问题时,一个非常有用的方法,是代原来的问题以一族正则化(或扰动)问题,而这族正则化问题中的每一个问题,将作为这些正则化问题的唯一解的极限而得出. 在本文中,我们将借用这一思想,提出一个求解变分不等式问题的一种分层不动点的粘性方法.

在本文中,我们处处假定 $H$ 是一实 Hilbert 空间, $C$ 是 $H$ 之一非空的闭凸子集, $F(T)$ 是映像 $T$ 的不动点集. 我们分别用"$\to$"和"$\rightharpoonup$"表强收敛和弱收敛. 我们称 $f: C\to C$ 为一 $\rho$- 压缩映像,如果存在一常数 $\rho\in(0,1)$ 使得 $\|f(x)-f(y)\|\leq\rho\|x-y\|$, $\forall x,y\in C$. 一映像 $T: C\to C$ 称为非扩张的, 如果 $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$, $\forall x,y\in C$.

设 $\{T_n\}: H\to H$ 是一可数族的非扩张映像,且 $\mathcal{F}:=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\neq\emptyset$(从而它是一非空的闭凸子集[1]). 所谓的分层寻求一可数族的非扩张映像 $\{T_n\}$ 关于另一非扩张映像 $S: H\to H$ 之一公共不动点,是求一点 $x^*\in\mathcal{F}$ 使得

$$\langle x^*-Sx^*,x^*-x\rangle\leq 0,\qquad\forall x\in\mathcal{F}.\tag{1}$$

特别是,如果 $T_n=T$, $\forall n\geq 1$,而且 $T$ 是 $H$ 上之一非扩张映像,则所谓的分层寻求非扩张映像 $T$ 关于另一非扩张映像 $S: H\to H$ 的一不动点是,求一 $x^*\in F(T)$ 使得

$$\langle x^*-Sx^*,x^*-x\rangle\leq 0,\qquad\forall x\in F(T).\tag{2}$$

易于知道,问题(1) 等价于下面的不动点问题: 求 $x^*\in\mathcal{F}$ 使得

$$x^*=P_{\mathcal{F}}Sx^*,$$

其中 $P_{\mathcal{F}}$ 是 $H$ 到一闭凸子集 $\mathcal{F}\subset H$ 上的度量投影. 如果借用关于 $\mathcal{F}$ 的正规锥 $N_{\mathcal{F}}$, 其由下式定义

---

* **收稿日期:** 2010-10-02; **修订日期:** 2011-01-06

**作者简介:** 张石生 (1934—),男,云南曲靖人,教授(联系人. E-mail: changss@yahoo.cn).

$$N_{\mathcal{F}}(x)=\begin{cases}\{u\in H:\langle y-x,u\rangle\leqslant 0,\forall y\in\mathcal{F}\}, & \text{如果 } x\in\mathcal{F};\\ \varnothing, & \text{否则.}\end{cases}$$

易于知道问题(1)等价于下面的变分包含问题：求 $x^*\in C$ 使得

$$\theta\in(I-S)x^*+N_{\mathcal{F}}x^*.$$

对于单个的非扩张映像的分层不动点的存在性问题,及其在 Hilbert 空间的框架下的逼近问题,已被许多作者研究过(例如见文献[2～12]).

受这方面已有的工作的启发,本文的目的,首先是借用投影方法证明了一个强收敛定理,它解决了某一变分不等式解的存在性问题;然后对参数作适当的假定,我们证明了一个弱收敛定理,它解决了分层不动点问题(1)解的存在性问题. 作为应用,在文末我们把在本文中所介绍的结果,应用于研究凸规划问题、单调包含问题、分层极小化问题,以及在不动点集上的二次极小化问题.

为此,我们首先给出某些预备性知识,它们在证明本文的主要结果时是必需的.

**引理 1.1**(半闭原理)[1]　设 $H$ 是一实 Hilbert 空间,$C$ 是 $H$ 之一非空的闭凸子集,$T$: $C\to C$ 是一非扩张映像,且 $F(T)\neq\varnothing$. 如果 $\{x_n\}$ 是 $C$ 中任一序列,使得 $x_n\rightharpoonup x$ 而且 $(x_n-Tx_n)\to y$,则 $(I-T)x=y$. 特别,如果 $y=0$,则 $x\in F(T)$.

由 $H$ 到 $C$ 上的度量投影是这样的一个映像 $P_C:H\to C$,对每一 $x\in H$,存在唯一点 $z=P_C(x)$ 使得

$$\|x-z\|=\inf_{y\in C}\|x-y\|=d(x,C).$$

下面的投影性质对我们来说是有用的.

**引理 1.2**　设 $x\in H,z\in C$ 是任意的两点,则

1) $z=P_C(x)$ 当而且仅当下面的关系式成立：

$$\langle x-z,y-z\rangle\leqslant 0,\qquad\forall y\in C.$$

2) 下面的关系式成立：

$$\langle P_C(x)-P_C(y),x-y\rangle\geqslant\|P_C(x)-P_C(y)\|^2,\qquad\forall x,y\in H.$$

上式表明 $P_C$: $H\to C$ 是非扩张的.

**引理 1.3**[13]　设 $\{a_n\}$ 是一非负的数列,使得

$$a_{n+1}\leqslant(1-\gamma_n)a_n+\delta_n,\qquad\forall n\geqslant 1,$$

其中 $\{\gamma_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的一序列,而 $\{\delta_n\}$ 是 $\mathscr{R}$ 中之一序列,使得

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$;

2) $\limsup_{n\to\infty}(\delta_n/\gamma_n)\leqslant 0$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<\infty$.

则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

**定义 1.4**　1) 设 $\{A_n\}$: $C\to C$ 是一映像的序列,而 $A$: $C\to C$ 是一映像. $\{A_n\}$ 称为图像收敛于 $A$, 如果 $\{\mathrm{graph}(A_n)\}$($A_n$ 的图像的序列) 在 Kuratowski-Painlevé 意义下收敛于 $\mathrm{graph}(A)$, 即

$$\limsup_{n\to\infty}\mathrm{graph}(A_n)\subset\mathrm{graph}(A)\subset\liminf_{n\to\infty}\mathrm{graph}(A_n).$$

2) 一多值映像 $A$: $H\to H$ 称为单调的,如果 $\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geqslant 0,\forall x,y\in H$. 一映像 $A$: $H\to H$ 称为极大单调的,如果它是单调的,而且对任意的 $x,u\in H$, 当

$$\langle u-v,x-y\rangle\geqslant 0,\qquad\text{对每一}(y,v)\in\mathrm{graph}(A)$$

成立时,则有 $u\in Ax$.

**引理 1.5**[14] 1）设 $A: H \to H$ 是一极大单调算子. 如果 $A^{-1}(0) \neq \emptyset$，则 $(t^{-1}A)$ 图像收敛于 $N_{A^{-1}(0)}$（当 $t \to 0$ 时）；

2）设 $\{B_n: H \to H\}$ 是一极大单调算子的序列，其图像收敛于算子 $B$. 如果 $A$ 是一 Lipschitz 的极大单调算子，则 $\{A + B_n\}$ 图像收敛于 $A + B$ 而且 $A + B$ 也是极大单调的.

**引理 1.6**（Xu[13]） 设 $f: C \to C$ 是一压缩映像，而 $T: C \to C$ 是一非扩张映像 且 $F(T) \neq \emptyset$. 设 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中之一序列，其满足下面的条件：

(i) $\alpha_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$；

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$.

设 $\{u_n\}$ 是由下式定义的序列

$$u_{n+1} = \alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n) Tu_n.$$

则 $\{u_n\}$ 强收敛于某一点 $x^* = P_{F(T)} fx^*$，而且该点是下面的变分不等式的唯一解

$$\langle (I - f)x^*, x - x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in F(T). \tag{3}$$

**引理 1.7** 设 $f: H \to H$ 是一压缩映像，而 $T: H \to H$ 是一非扩张映像. 则

1）映像 $(I - f): H \to H$ 是强单调的；

2）映像 $(I - T): H \to H$ 是单调的，从而其是极大单调的.

## 2 主要结果

为了分层寻求问题(1)之一不动点，我们引入下面的迭代算法：

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) y_n, \\ y_n = \beta_n Sx_n + (1 - \beta_n) Tx_n, \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\{T_n\}: H \to H$ 是一可数族的非扩张映像，而 $T: H \to H$ 是一由下式定义的映像

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n, \qquad \lambda_n \geqslant 0,\ n = 1,2,\cdots \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1. \tag{5}$$

由 Bruck 的文献[15]知，$T: H \to H$ 是一非扩张映像，且 $F(T) = \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

我们首先给出下面的结果：

**定理 2.1** 设 $H$ 是一实 Hilbert 空间，$C$ 是 $H$ 的一非空的闭凸子集，$\{T_n: C \to C\}$ 是一可数族的非扩张映像，且 $\cap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$. 设 $T: C \to C$ 是一由式(5) 定义的非扩张映像. 设 $S: C \to C$ 是一非扩张映像，而 $f: C \to C$ 是一 具压缩常数 $\rho \in (0,1)$ 的压缩映像. 设 $\{x_n\}$ 是由式(4) 定义的序列，而 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的二序列，其满足下面的条件：

(i) $\alpha_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$；

(ii) $\lim_{n\to\infty} (\beta_n / \alpha_n) = 0$；

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$.

则 $\{x_n\}$ 强收敛于某一点 $x^* \in F(T) = \cap_{i=1}^{\infty} F(T_n)$，而且该点是下面的变分不等式的唯一解：

$$\langle (I - f)x^*, x - x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in F(T). \tag{6}$$

**证明** 由条件(ii)，不失一般性，我们可以假定 $\beta_n \leqslant \alpha_n$，$\forall n \geqslant 1$.

(I) 先证序列 $\{x_n\}$ 是有界的

事实上，对任意给定的 $u \in F(T)$，由式(4) 得知 $\forall n \geqslant 1$，

$$\|x_{n+1}-u\| \leqslant \alpha_n \|f(x_n)-f(u)+f(u)-u\| + (1-\alpha_n)\|y_n-u\| \leqslant \\ \alpha_n\rho\|x_n-u\| + \alpha_n\|f(u)-u\| + (1-\alpha_n)\|y_n-u\|. \tag{7}$$

因为

$$\|y_n-u\| \leqslant \beta_n\|Sx_n-Su+Su-u\| + (1-\beta_n)\|Tx_n-u\| \leqslant \\ \beta_n\|x_n-u\| + \beta_n\|Su-u\| + (1-\beta_n)\|x_n-u\| = \\ \|x_n-u\| + \beta_n\|Su-u\|, \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{8}$$

把式(8)代入式(7),简化后有

$$\|x_{n+1}-u\| \leqslant \\ \alpha_n\rho\|x_n-u\| + \alpha_n\|f(u)-u\| + (1-\alpha_n)\{\|x_n-u\| + \beta_n\|Su-u\|\} = \\ (1-\alpha_n(1-\rho))\|x_n-u\| + \alpha_n(1-\rho)\left\{\frac{\|f(u)-u\|}{1-\rho} + \frac{\|Su-u\|}{1-\rho}\right\} \leqslant \\ \max\left\{\|x_n-u\|, \frac{\|f(u)-u\| + \|Su-u\|}{1-\rho}\right\}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

由归纳法,可证

$$\|x_n-u\| \leqslant \max\left\{\|x_0-u\|, \frac{\|f(u)-u\| + \|Su-u\|}{1-\rho}\right\}, \qquad \forall n \geqslant 1.$$

这就表明 $\{x_n\}$ 是有界的,从而 $\{f(x_n)\}$, $\{Tx_n\}$, $\{y_n\}$ 及 $\{Sx_n\}$ 都是有界的.

(Ⅱ) 现在我们定义一序列 $\{u_n\}$ 如下:

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \in C, \\ u_{n+1} = \alpha_n f(u_n) + (1-\alpha_n)Tu_n. \end{cases} \tag{9}$$

由引理 1.6, $\{u_n\}$ 强收敛于某一点 $x^* \in F(T)$, 而且该点是下面的变分不等式的唯一解

$$\langle (I-f)x^*, x-x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in F(T). \tag{10}$$

(Ⅲ) 下面证明 $\|x_n-u_n\| \to 0$ (当 $n\to\infty$ 时).

事实上,式(4)可以重新写成

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)Tx_n + (1-\alpha_n)\beta_n(Sx_n - Tx_n). \end{cases} \tag{11}$$

因此,我们有

$$\|x_{n+1}-u_{n+1}\| = \\ \|\alpha_n(f(x_n)-f(u_n)) + (1-\alpha_n)(Tx_n-Tu_n) + (1-\alpha_n)\beta_n(Sx_n-Tx_n)\| \leqslant \\ \alpha_n\rho\|x_n-u_n\| + (1-\alpha_n)\|x_n-u_n\| + (1-\alpha_n)\beta_n\|Sx_n-Tx_n\| = \\ (1-\alpha_n(1-\rho))\|x_n-u_n\| + \beta_n M,$$

其中 $M = \sup_{n\geqslant 1}\|Sx_n - Tx_n\|$. 由条件(ii)及引理 1.3, $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\| = 0$. 因为 $u_n \to x^* \in F(T)$,从而 $x_n \to x^*$ 而且它是变分不等式(10)在 $F(T) = \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ 中的唯一解.

定理 2.1 的结论证毕.

在定理 2.1 中如果 $f=0$, 则可得下面的结果:

**推论 2.2**　设 $H$ 是一实 Hilbert 空间, $C$ 是 $H$ 之一非空的闭凸子集, $\{T_n: C\to C\}$ 是一可数族的非扩张映像, 而且 $\cap_{n=1}^{\infty}F(T_n) \neq \emptyset$. 设 $T: C\to C$ 是由式(5)定义的非扩张映像. 设 $S: C \to C$ 是一非扩张映像. 设 $\{x_n\}$ 是由下式定义的序列:

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)(\beta_n Sx_n + (1-\beta_n)Tx_n), \end{cases} \tag{12}$$

其中，$\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 是 $(0,1)$ 中满足定理2.1中的条件(i)、(ii)、(iii)的序列。则 $\{x_n\}$ 强收敛于某一点 $x^* \in F(T)=\cap_{i=1}^{\infty}F(T_n)$，且该点也是下面的二次极小化问题的唯一解：

$$\|x^*\|^2 = \min_{x \in F(T)} \|x\|^2. \tag{13}$$

**证明** 由定理2.1知，$x_n \to x^*$，而且 $x^*$ 是下面的变分不等式在 $F(T)$ 中的唯一解：

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geqslant 0, \qquad \forall x \in F(T),$$

这就表明 $\|x^*\|^2 \leqslant \langle x^*, x \rangle, \forall x \in F(T)$，即

$$\|x^*\|^2 = \min_{x \in F(T)} \|x\|^2.$$

推论2.2的结论证毕。

**定理2.3** 设 $H$ 是一实 Hilbert 空间，$\{T_n: H \to H\}$ 是一可数族的非扩张映像，且 $\cap_{n=1}^{\infty}F(T_n) \neq \emptyset$。设 $T: H \to H$ 是由式(5)定义的非扩张映像。设 $S: H \to H$ 是一非扩张映像，而 $f: H \to H$ 是一具压缩常数 $\rho \in (0,1)$ 的压缩映像。设 $\{x_n\}$ 是由式(4)定义的序列 而 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列，满足下面的条件：

(i) $\alpha_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$；

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\alpha_n/\beta_n) = 0$（不失一般性，可以假定 $\alpha_n \leqslant \beta_n, \forall n \geqslant 1$）；

(iii) $\lim_{n\to\infty}(|\alpha_n - \alpha_{n-1}|/\alpha_n) = 0$ 而且 $\lim_{n\to\infty}(|\beta_n - \beta_{n-1}|/(\alpha_n\beta_{n-1})) = 0$.

如果 $\{x_n\}$ 是有界的，则 $\{x_n\}$ 弱收敛于某一点 $x^* \in H$，它是分层不动点问题（1）的解，即，$x^* \in F(T)$ 使得

$$\langle x^* - Sx^*, x^* - x \rangle \leqslant 0, \qquad \forall x \in F(T).$$

**证明** 我们把定理的证明分成4步。

(I) 由假定 $\{x_n\}$ 是有界的，故 $\{f(x_n)\}$，$\{Tx_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{Sx_n\}$ 都是有界的。

(II) 现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{14}$$

事实上，由式(4)得知

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_n\| = \\
&\quad \|\alpha_n(f(x_n) - f(x_{n-1})) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})f(x_{n-1}) + \\
&\quad (1-\alpha_n)(y_n - y_{n-1}) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})y_{n-1}\| \leqslant \\
&\quad \alpha_n\rho\|x_n - x_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}|(\|f(x_{n-1})\| + \|y_{n-1}\|) + \\
&\quad (1-\alpha_n)\|y_n - y_{n-1}\|,
\end{aligned} \tag{15}$$

而且

$$\begin{aligned}
&\|y_n - y_{n-1}\| = \\
&\quad \|\beta_n(S(x_n) - S(x_{n-1})) + (\beta_n - \beta_{n-1})S(x_{n-1}) + \\
&\quad (1-\beta_n)(Tx_n - Tx_{n-1}) + (\beta_n - \beta_{n-1})Tx_{n-1}\| \leqslant \\
&\quad \beta_n\|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n - \beta_{n-1}|(\|Sx_{n-1}\| + \|Tx_{n-1}\|) + \\
&\quad (1-\beta_n)\|x_n - x_{n-1}\| = \\
&\quad \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n - \beta_{n-1}|(\|Sx_{n-1}\| + \|Tx_{n-1}\|) \leqslant \\
&\quad \|x_n - x_{n-1}\| + |\beta_n - \beta_{n-1}|M_1,
\end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$M_1 = \sup_{n\geqslant 0}\{(\|Sx_{n-1}\| + \|Tx_{n-1}\|) + (\|f(x_n)\| + \|y_n\|)\} < \infty.$$

把式(16)代入式(15),简化后,即得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant & (1-\alpha_n(1-\rho))\|x_n-x_{n-1}\| + \\ & (|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|)M_1.\end{aligned} \tag{17}$$

由条件(iii), $\lim_{n\to\infty}((|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|)/\alpha_n)=0$. 故结论(14)由引理1.3即得.

(Ⅲ) 现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|x_{n+1}-x_n\|}{\beta_n}=0. \tag{18}$$

事实上,由式(17)得知

$$\begin{aligned}\frac{\|x_{n+1}-x_n\|}{\beta_n} \leqslant & (1-\alpha_n(1-\rho))\frac{\|x_n-x_{n-1}\|}{\beta_{n-1}} + \\ & (1-\alpha_n(1-\rho))\|x_n-x_{n-1}\|\left(\frac{1}{\beta_n}-\frac{1}{\beta_{n-1}}\right) + \\ & \frac{(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|)M_1}{\beta_n} \leqslant \\ & (1-\alpha_n(1-\rho))\frac{\|x_n-x_{n-1}\|}{\beta_{n-1}} + M_2\frac{|\beta_{n-1}-\beta_n|}{\beta_n\beta_{n-1}} + \\ & \frac{(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|)M_1}{\beta_n},\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $M_2=\sup_{n\geqslant1}\|x_n-x_{n-1}\|$. 由条件(iii),

$$\frac{(|\alpha_n-\alpha_{n-1}|+|\beta_n-\beta_{n-1}|)M_1}{\beta_n}\to0 \text{ 且 } M_2\frac{|\beta_{n-1}-\beta_n|}{\beta_n\beta_{n-1}}\to0 \quad (\text{当 } n\to\infty).$$

故由引理1.3, $\lim_{n\to\infty}((\|x_{n+1}-x_n\|)/\beta_n)=0$.

(Ⅳ) 现在证明

$$\|x_n-Tx_n\|\to0 \quad (\text{当 } n\to\infty). \tag{20}$$

事实上,由式(11)有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-Tx_n\| \leqslant & \\ & \alpha_n\|f(x_n)-Tx_n\|+(1-\alpha_n)\beta_n\|Sx_n-Tx_n\|\to0 \quad (\text{当 } n\to\infty).\end{aligned}$$

又由式(14)知, $\|x_{n+1}-x_n\|\to0$, 故有

$$\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-Tx_n\|\to0 \quad (\text{当 } n\to\infty).$$

(Ⅴ) 最后我们证明定理2.3的结论.

因 $\{x_n\}$ 是有界的,故存在一子序列 $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$ 使得 $\{x_{n_i}\}$ 弱收敛某一点 $x^*\in H$. 因为 $\|x_{n_i}-Tx_{n_i}\|\to0$,故由引理1.1, $x^*\in F(T)$.

其次,由式(4)有

$$\frac{x_{n_i}-x_{n_i+1}}{\beta_{n_i}}=\frac{\alpha_{n_i}}{\beta_{n_i}}(I-f)(x_{n_i})+(1-\alpha_{n_i})\left((I-S)+\frac{(1-\beta_{n_i})}{\beta_{n_i}}(I-T)\right)x_{n_i}. \tag{21}$$

于是由式(18)及条件(ii),以及 $\{(x_n-f(x_n)\}$ 的有界性,我们有

$$\begin{cases}\dfrac{x_{n_i}-x_{n_i+1}}{\beta_{n_i}}\to0 & (\text{当 } n_i\to\infty); \\ \dfrac{\alpha_{n_i}}{\beta_{n_i}}(I-f)(x_{n_i})\to0 & (\text{当 } n_i\to\infty).\end{cases} \tag{22}$$

另外,由引理 1.5 和引理 1.7 知,$(I-S)+((1-\beta_{n_i})/\beta_{n_i})(I-T)$ 图像收敛于$(I-S)+N_{F(T)}$. 在式(21)中,让 $n_i\to\infty$ 取极限,并计及式(22)及$(I-S)+N_{F(T)}$ 的图像是弱-强闭的,可得

$$\theta\in(I-S)x^*+N_{F(T)}x^*.$$

上式表明 $x^*\in F(T)$ 是 问题(1)之一解,即 $x^*$ 是一可数族的非扩张映像$\{T_n\}$ 的关于另一非扩张映像 $S$ 的分层的公共不动点.

定理 2.3 的结论得证.

# 3 应 用

在本节中,我们利用第 2 节中所介绍的结果,给出其对某些问题的应用.

**(Ⅰ) 对单调变分不等式问题的应用**

令 $S=I-\gamma G$,其中 $G:H\to H$ 是一 $\eta$-Lipschitz 的 $k$-强单调映像,其中 $\gamma\in(0,2k/\eta^2]$. 现在我们证明 $S:H\to H$ 是一非扩张映像. 事实上,由假设条件,我们有

$$\begin{aligned}\|Sx-Sy\|^2&=\|(x-y)-(\gamma G(x)-\gamma G(y))\|^2=\\&\|x-y\|^2-2\gamma\langle x-y,Gx-Gy\rangle+\gamma^2\|Gx-Gy\|^2\leqslant\\&\|x-y\|^2-2\gamma k\|x-y\|^2+\gamma^2\eta^2\|x-y\|^2=\\&(1-2\gamma k+\gamma^2\eta^2)\|x-y\|^2\leqslant\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in H.\end{aligned}$$

故问题(1)就归结为求 $x^*\in F(T)$ 使得

$$\langle x-x^*,Gx^*\rangle\geqslant 0,\qquad\forall x\in F(T).\tag{23}$$

当$\{T_n=T,\forall n\geqslant 1\}$且 $T:H\to H$ 是一非扩张映像时,Yamada 和 Ogura 首先在文献[16]中考虑这一问题.

**(Ⅱ) 对凸规划问题的应用**

设 $A:H\to H$ 是一极大单调映像,$T=(I+\lambda A)^{-1}$,$S=I-\gamma\nabla\psi$ 且 $\gamma\in(0,2/\eta]$. 设 $\psi:H\to\mathscr{R}$ 是一凸下半连续函数,且 $\nabla\psi$ 是 Lipschitz 的,其等价于

$$\langle\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y),x-y\rangle\geqslant\eta^{-1}\|\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\|,\qquad\forall x,y\in H.$$

由上面的假定,我们知道 $T:H\to H$ 是一非扩张映像且 $F(T)=A^{-1}(0)$. 现在我们证明 $S:H\to H$ 也是一非扩张映像. 事实上,我们有

$$\begin{aligned}&\|Sx-Sy\|^2=\\&\quad\|x-\gamma\nabla\psi(x)-(y-\gamma\nabla\psi(y))\|^2=\\&\quad\|x-y\|^2+\gamma^2\|\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\|^2-2\gamma\langle x-y,\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\rangle\leqslant\\&\quad\|x-y\|^2+\gamma^2\|\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\|^2-2\gamma\eta^{-1}\|\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\|^2=\\&\quad\|x-y\|^2+(\gamma^2-2\gamma\eta^{-1})\|\nabla\psi(x)-\nabla\psi(y)\|^2\leqslant\qquad(\text{因 }\gamma^2-2\gamma\eta^{-1}<0)\\&\quad\|x-y\|^2,\qquad\forall x,y\in H,\end{aligned}$$

因此,$S:H\to H$ 是非扩张的. 于是问题(1)就化为求 $x^*\in A^{-1}(0)$ 使得$\langle\gamma\nabla\psi(x^*),x^*-x\rangle\leqslant 0,\forall x\in A^{-1}(0)$,即

$$\langle\nabla\psi(x^*),x-x^*\rangle\geqslant 0,\qquad\forall x\in A^{-1}(0).$$

借用次微分不等式,这就推出

$$\psi(x)-\psi(x^*)\geqslant 0,\qquad\forall x\in A^{-1}(0).$$

于是问题(1)就化为下面的凸数学规划问题:求 $x^*\in A^{-1}(0)$ 使得

$$\min_{0\in A(x)}\psi(x).\tag{24}$$

这一问题已在 Luo 等的文献[17]中考虑过.

⑶ **对分层极小化问题的应用**

取 $A=\partial\phi$,其中 $\phi: H\to\mathscr{R}$ 是一下半连续的凸函数, 而且 $\partial\phi$ 是 $\phi$ 的次微分. 因为 $0\in A(x)=\partial\phi(x)$,这表明 $x$ 是 $\phi$ 之一极小点. 因此问题(24) 就化为下面的分层极小化问题:求 $x^*\in A^{-1}(0)$ 使得

$$\min_{x\in\arg\min\phi}\psi(x)\,. \tag{25}$$

这一问题对单个的非扩张映像 $T$, 已在 Cabot 的文献[18]及 Solodov 的文献[16]中考虑过.

⑷ **对不动点集上的二次极小化问题的应用**

在式(1)中令 $S=I-\kappa(A-\gamma f)$,其中 $A: H\to H$ 是一线性的有界的 $\kappa$- 强正算子,且 $\kappa>1$(即,$\langle Ax,x\rangle\geqslant\kappa\|x\|^2$, $\forall x\in H$). 设 $f: H\to H$ 是一 $\rho$- 压缩映像,其中 $\rho\in(0,1)$, $\gamma\in((1/\rho)(\kappa-1/\kappa),\kappa/\rho]$. 现在我们证明 $S: H\to H$ 是一非扩张映像. 事实上,我们有

$$\begin{aligned}\|Sx-Sy\|&\leqslant\|(I-\kappa A)x-(I-\kappa A)y\|+\kappa\gamma\|f(x)-f(y)\|\leqslant\\&\|I-\kappa A\|\,\|x-y\|+\kappa\gamma\rho\|x-y\|\leqslant(1-\kappa^2+\kappa\gamma\rho)\|x-y\|\leqslant\\&\|x-y\|\qquad\left(\text{因 }\gamma\in\left(\frac{1}{\rho}\left(\kappa-\frac{1}{\kappa}\right),\frac{\kappa}{\rho}\right)\right),\ \forall x,y\in H.\end{aligned}$$

于是式(1)就归结为求一 $x^*\in F(T)$ 使得

$$\langle(A-\gamma f)x^*,x-x^*\rangle\geqslant0,\qquad\forall x\in F(T)\,. \tag{26}$$

上式是下面的二次极小化问题的最优化条件:

$$\min_{x\in F(T)}\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-h(x), \tag{27}$$

其中 $h$ 是 $\gamma f$ 的势 (即,$h'(x)=\gamma f(x)$) .

这一问题对单个的非扩张映像 $T$ 曾在 Marino 和 Xu 的文献[6]中研究过 .

**致谢**　作者对审稿人为改进本文所提出的的宝贵意见表示衷心感谢,并感谢宜宾学院自然科学基金的资助 (2009Z03).

## 参考文献:


[1] Goebel K, Kirk W A. *Topics in Metric Fixed Point Theory*[M]. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. **28**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[2] Byrne C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction[J]. *Inverse Problems*, 2004, **20**(1): 103-120.

[3] Censor Y, Motova A, Segal A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **327**(2): 1244-1256.

[4] Cianciaruso F, Marino G, Muglia L, Yao Y. On a two-step algorithm for hierarchical fixed points and variational inequalities[J]. *J Inequalities and Appl*, 2009, Article ID 208692, 13 pages. doi:10.1155/2009/208692.

[5] Cianciaruso F, Colao V, Muglia L, Xu H K. On an implicit hierarchical fixed point approach to variational inequalities[J]. *Bull Austral Math Soc*, 2009, **80**(1): 117-124.

[6] Mainge P E,Moudafi A. Strong convergence of an iterative method for hierarchical fixed point problems[J]. *Pacific J Optim*, 2007,**3**(3): 529-538.

[7] Marino G, Xu H K. A general iterative method for nonexpansive mappings in Hilbert space [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **318**(1): 43-52.

[8] Moudafi A. Krasnoselski-Mann iteration for hierarchical fixed point problems[J]. *Inverse Problems*, 2007, **23**(4): 1635-1640.
[9] Solodov M. An explicit descent method for bilevel convex optimization[J]. *J Convex Anal*, 2007, **14**(2): 227-237.
[10] Yao Y, Liou Y C. Weak and strong convergence of Krasnoselski-Mann iteration for hierarchical fixed point problems[J]. *Inverse Problems*, 2008, **24**(1): 15015-15022.
[11] Xu H K. A variable Krasnoselski-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem [J]. *Inverse Problems*, 2006, **22**(6): 2021-2034.
[12] Xu H K. Viscosity methods for hierarchical fixed point approach to variational inequalities [J]. *Taiwanese J Math*, 2010, **14**(2): 463-478.
[13] Xu H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. *J London Math Soc*, 2002, **66**(1): 240-252.
[14] Lions P L. Two remarks on the convergence of convex functions and monotone operators [J]. *Nonlinear Anal*, 1978, **2**(5): 553-562.
[15] Bruck Jr R E. Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1973, **179**: 251-262.
[16] Yamada I, Ogura N. Hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings[J]. *Numer Func Anal Optim*, 2004, **25**(7): 619-655.
[17] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. *Mathematical Programs With Equilibrium Constraints*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
[18] Cabot A. Proximal point algorithm controlled by a slowly vanishing term: applications to hierarchical minimization[J]. *SIAM J Optim*, 2005, **15**(2): 555-572.

# Viscosity Method for Hierarchical Fixed Point and Variational Inequalities With Applications

ZHANG Shi-sheng[1], WANG Xiong-rui[1], H. W. Joseph LEE[2], Chi Kin CHAN[2]

(1. *Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan* 644007, *P. R. China*;
2. *Department of Applied Mathematics, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong*)

**Abstract**: A viscosity method for a hierarchical fixed point approach to variational inequality problems was presented, which was used to solve variational inequalities where the involving mappings were nonexpansive and the solutions were sought in the set of the fixed points of another nonexpansive mapping. As applications, the results were utilized to study the monotone variational inequality problem, convex programming problem, hierarchical minimization problem and quadratic minimization problem over fixed point sets.

**Key words**: hierarchical fixed point; nonexpansive mapping; fixed point; viscosity approximation; hierarchical minimization